Популярные лекции
ПО МАТЕМАТИКЕ

И. П. НАТАНСОН

СУММИРОВАНИЕ БЕСКОНЕЧНО МАЛЫХ ВЕЛИЧИН

*

ФИЗМАТГИЗ · 1960

АН
КНИГИ
НИКИТИНА

ПОПУЛЯРНЫЕ ЛЕКЦИИ ПО МАТЕМАТИКЕ
ВЫПУСК 12

И. П. НАТАНСОН

СУММИРОВАНИЕ БЕСКОНЕЧНО МАЛЫХ ВЕЛИЧИН

ИЗДАНИЕ ТРЕТЬЕ,
ИСПРАВЛЕННОЕ

ГОСУДАРСТВЕННОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА 1960

ПРЕДИСЛОВИЕ

Изучение интегрального исчисления довольно трудно, так как в своем современном виде это исчисление является результатом взаимного переплетения большого числа весьма разнородных идей.

Однако самое основное понятие интегрального исчисления (по существу восходящее еще к античной древности) — понятие ***предела суммы безгранично возрастающего числа безгранично убывающих слагаемых*** — очень просто и естественно.

Овладение этим понятием не требует большой подготовки и в то же время очень полезно, так как дает возможность решить ряд важных задач геометрии и физики, позволяет глубже усвоить идею предела и служит прекрасным введением в систематическое изучение высшей математики.

В настоящей книжке рассказывается, в чем состоит упомянутое понятие и как оно применяется для решения разнообразных конкретных задач. Содержащийся здесь материал представляет собой дополненную и расширенную обработку лекций, которые я неоднократно читал ленинградским школьникам девятых и десятых классов. Этот материал может быть использован и в работе школьного математического кружка.

И. Натансон

13 апреля 1953 г.
Ленинград

§ 1. НЕКОТОРЫЕ ФОРМУЛЫ АЛГЕБРЫ

1°. В дальнейшем изложении нам понадобятся некоторые формулы, относящиеся к курсу алгебры, но не всегда излагаемые в школе. Эти формулы дают выражение сумм вида

$$S_p = 1^p + 2^p + 3^p + \ldots + n^p,$$

где p означает целое число. Нам потребуется выражение сумм S_p лишь для малых значений p:

$$p = 1,\ 2,\ 3.$$

Выведем указанные выражения.

2°. Сумма членов натурального ряда. Найдем прежде всего сумму

$$S_1 = 1 + 2 + 3 + \ldots + n.$$

Эта сумма есть сумма n членов арифметической прогрессии с первым членом $a_1 = 1$ и разностью $d = 1$; поэтому величина ее может быть определена с помощью известной формулы алгебры:

$$S_1 = \frac{n(n+1)}{2}. \qquad (1)$$

Мы укажем другой способ установления формулы (1), хотя и несколько более сложный, но зато с успехом применимый к нахождению любой суммы S_p.

Возьмем известное равенство

$$(n+1)^2 = n^2 + 2n + 1$$

и заменим в нем последовательно n на $n-1$, затем на $n-2$ и так далее, пока не дойдем до единицы. В результате мы

получим целый ряд равенств:

$$\left.\begin{aligned}
(n+1)^2 &= n^2 + 2n + 1\\
n^2 &= (n-1)^2 + 2(n-1) + 1\\
(n-1)^2 &= (n-2)^2 + 2(n-2) + 1\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
2^2 &= 1^2 + 2\cdot 1 + 1
\end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

Сложим все эти равенства. При этом обратим внимание на то, что столбик слагаемых левой части будет состоять почти из тех же слагаемых, что и столбик *первых* слагаемых правой части. Различие между этими столбиками состоит в том, что в левой части отсутствует слагаемое 1^2, стоящее последним в столбике правой части, и присутствует $(n+1)^2$, которого нет в правой части.

На основании этого замечания видно, что после уничтожения одинаковых слагаемых обоих столбиков мы получаем:

$$(n+1)^2 = 1^2 + \{2n + 2(n-1) + \ldots + 2\cdot 1\} + \\ + \{1 + 1 + \ldots + 1\}.$$

Число слагаемых во *второй* фигурной скобке равно числу строк в равенствах (2), т. е. равно n, так что и вся эта скобка равна n. Далее заметим, что если из *первой* фигурной скобки вынести общий множитель 2, то в скобке останется как раз сумма S_1. Если еще заменить 1^2 на 1, то мы найдем

$$(n+1)^2 = 1 + 2S_1 + n.$$

Отсюда

$$2S_1 = (n+1)^2 - (n+1) = (n+1)[(n+1) - 1] = n(n+1),$$

и окончательно

$$S_1 = \frac{n(n+1)}{2},$$

так что мы вновь получаем формулу (1).

3°. Сумма квадратов. Применим только что указанный способ для нахождения величины суммы *квадратов* первых n натуральных чисел, т. е. суммы

$$S_2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2.$$

Для этого мы заменим в равенстве

$$(n+1)^3 = n^3 + 3n^2 + 3n + 1$$

последовательно n на $n-1$, на $n-2$ и так далее, пока не дойдем до единицы. Это приведет нас к ряду равенств:

$$\left.\begin{aligned}
(n+1)^3 &= n^3 + 3n^2 + 3n + 1\\
n^3 &= (n-1)^3 + 3(n-1)^2 + 3(n-1) + 1\\
(n-1)^3 &= (n-2)^3 + 3(n-2)^2 + 3(n-2) + 1\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
2^3 &= 1^3 + 3\cdot 1^2 + 3\cdot 1 + 1
\end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

Сложим все эти равенства. Как и в предыдущем случае, мы сможем произвести значительные упрощения; именно, из столбика слагаемых левой части исчезнут все слагаемые, кроме первого, т. е. кроме $(n+1)^3$, а из столбика *первых* слагаемых правой части исчезнут все слагаемые, кроме последнего, т. е. кроме 1^3.

Далее, если из столбика *вторых* слагаемых правой части вынести общий множитель 3, то, очевидно, останется как раз подлежащая нахождению сумма S_2. Точно так же столбик третьих слагаемых правой части дает утроенную сумму S_1, уже найденную выше. Если мы заметим еще, что число строк в (3) равно n, то найдем:

$$(n+1)^3 = 1^3 + 3S_2 + 3S_1 + n.$$

Заменим теперь 1^3 на 1, а S_1 — ее выражением (1), что дает

$$(n+1)^3 = 1 + 3S_2 + 3\frac{n(n+1)}{2} + n.$$

Отсюда

$$3S_2 = (n+1)^3 - \frac{3}{2}n(n+1) - (n+1),$$

или

$$3S_2 = (n+1)\left[(n+1)^2 - \frac{3}{2}n - 1\right] = n(n+1)\left(n + \frac{1}{2}\right).$$

Стало быть,

$$3S_2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{2}.$$

Окончательно имеем:

$$S_2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}. \qquad (4)$$

4°. Сумма кубов. Совершенно так же, исходя из равенства

$$(n+1)^4 = n^4 + 4n^3 + 6n^2 + 4n + 1,$$

мы придем к системе равенств:

$$\begin{aligned}
(n+1)^4 &= n^4 + 4n^3 + 6n^2 + 4n + 1,\\
n^4 &= (n-1)^4 + 4(n-1)^3 + 6(n-1)^2 + 4(n-1) + 1,\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
2^4 &= 1^4 + 4\cdot 1^3 + 6\cdot 1^2 + 4\cdot 1 + 1.
\end{aligned}$$

После сложения и надлежащих упрощений найдем:

$$(n+1)^4 = 1 + 4S_3 + 6S_2 + 4S_1 + n.$$

Заменяя суммы S_1 и S_2 уже найденными их выражениями (1) и (4) и проделывая все вычисления, которые, без сомнения, можно предоставить читателю, мы получим выражение и для суммы S_3:

$$S_3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}. \qquad (5)$$

Подобным же образом можно найти суммы S_4, S_5 и т. д.

5°. Хотя это и не имеет прямого отношения к теме этой книжки, мы не можем не коснуться одного очень любопытного следствия формул (1) и (5). Именно, из сопоставления этих формул видно, что

$$S_3 = S_1^2,$$

или, более подробно,

$$1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = (1 + 2 + \dots + n)^2. \qquad (6)$$

Например,

$$1^3 + 2^3 = 9 \text{ и } (1+2)^2 = 9,$$

или

$$1^3 + 2^3 + 3^3 = 36 \text{ и } (1+2+3)^2 = 36,$$

или

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 = 100 \text{ и } (1+2+3+4)^2 = 100.$$

Равенство (6) является тем более интересным, что, как нетрудно убедиться, вовсе не имеет места более общее равенство

$$a^3 + b^3 + \dots + k^3 = (a + b + \dots + k)^2$$

при произвольных значениях чисел $a, b, \dots, k$.

Например,

$$2^3 + 4^3 = 72, \quad (2+4)^2 = 36,$$

а $72 \neq 36$.

6°. Знак Σ. Формулы (1), (4) и (5) можно записать и в другой форме, если воспользоваться очень распространенным в математике знаком Σ. Именно, если имеется ряд слагаемых, обозначенных одной и той же буквой, например a, но отмеченных для отличия друг от друга значками при этой букве: $a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n$, то сумму этих слагаемых обозначают символом

$$\sum_{k=1}^{n} a_k, \tag{7}$$

где знак a_k указывает, что *типичное* слагаемое этой суммы есть a с некоторым значком, а ниже и выше знака суммирования Σ указано, что значок при букве a пробегает все целые значения от 1 до n. Самый знак Σ есть прописная греческая буква *сигма*.

С помощью знака Σ суммы S_1, S_2, S_3 могут быть изображены так:

$$S_1 = \sum_{k=1}^{n} k, \quad S_2 = \sum_{k=1}^{n} k^2, \quad S_3 = \sum_{k=1}^{n} k^3,$$

а формулы (1), (4) и (5) принимают вид *):

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}}, \tag{8}$$

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}}, \tag{9}$$

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}}. \tag{10}$$

7°. Некоторые свойства знака Σ. Отметим еще некоторые свойства знака суммирования Σ.

1) Если каждое из слагаемых само есть сумма двух слагаемых, то и сумма их распадается на две суммы.

*) Мы считаем, что читатель этой книжки изучает ее с „карандашом в руках". Если это так, то мы рекомендуем выписать формулы (8), (9) и (10) на отдельный листок и иметь их в дальнейшем перед глазами.

Именно:

$$\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)=\sum_{k=1}^{n}a_k+\sum_{k=1}^{n}b_k. \tag{11}$$

Для доказательства равенства (11) достаточно написать его левую часть в развернутом виде:

$$(a_1+b_1)+(a_2+b_2)+\ \dots\ +(a_n+b_n),$$

что, очевидно, можно переписать так:

$$(a_1+a_2+\ \dots\ +a_n)+(b_1+b_2+\ \dots\ +b_n),$$

а это и есть правая часть равенства (11).

2) Если все слагаемые суммы имеют общий множитель, то его можно вынести за знак суммы:

$$\sum_{k=1}^{n}ca_k=c\sum_{k=1}^{n}a_k. \tag{12}$$

Доказательство предоставляем читателю.

3) Если все слагаемые a_k равны *одной и той же величине* a, то сумма равна этой же величине, умноженной на число слагаемых,

$$\sum_{k=1}^{n}a=na. \tag{13}$$

Это свойство также легко может быть доказано читателем. Ввиду чрезвычайной простоты указанных свойств знака Σ, мы будем ниже пользоваться ими, не оговаривая этого специально.

§ 2. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ДАВЛЕНИЯ ЖИДКОСТИ НА ВЕРТИКАЛЬНУЮ СТЕНКУ

8°. Давление на стенку резервуара. Допустим, что перед нами прямоугольный резервуар, наполненный водой; размеры его указаны на рис. 1. Поставим задачу найти давление*) P воды на переднюю стенку резервуара.

Для решения этой задачи следует вспомнить некоторые законы гидростатики.

---

*) И здесь и ниже, говоря о „давлении", мы имеем в виду всю силу, с которой вода давит на стенку, а не силу, рассчитанную на единицу площади (т. е. не удельное давление).

9°. Если под водой находится некоторая *горизонтальная* площадка, то давление воды на нее равно весу опирающегося на площадку столба воды, т. е. цилиндрического столба, имеющего эту площадку своим основанием, а высотой — глубину погружения площадки. Так как речь идет о воде, удельный вес которой равен единице, то вес упомянутого столба равен его объему, т. е. равен площади площадки, умноженной на глубину ее погружения. Это произведение и дает, таким образом, величину давления на горизонтальную площадку.

Если под водой находится площадка не горизонтальная, то различные ее точки находятся на различной глубине, и о глубине погружения самой площадки нельзя говорить. Но

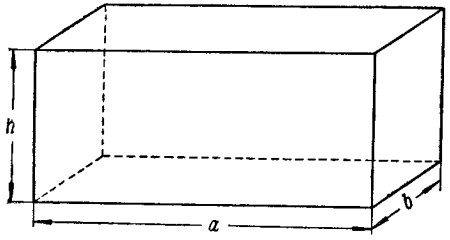

Рис. 1.

если эта площадка *очень мала*, то можно *приближенно* считать, что все ее точки погружены на одну и ту же глубину, и назвать эту глубину глубиной погружения самой площадки.

Допустим, что нам дана подобная очень маленькая площадка, погруженная в воду; определим давление на нее. Для этой цели представим себе, что мы повернули эту площадку около одной из ее точек так, чтобы она стала горизонтальной. Так как давление внутри жидкости в каждой ее точке передается по всем направлениям одинаково, а размеры площадки очень малы, то указанная операция поворота почти не изменит давления на площадку. Вместе с тем к площадке в ее новом *горизонтальном* положении уже применимо указанное выше правило определения давления. Так как процесс поворота площадки не изменяет ни ее площади, ни глубины погружения (последнее потому, что площадка весьма мала), то мы можем высказать такое утверждение: *давление на малую площадку, находящуюся*

под водой, равно площади этой площадки, умноженной на глубину ее погружения.

Это правило не вполне точное, а приближенное. Оно дает тем более точный результат, чем меньше рассматриваемая площадка.

10°. Установив этот закон, вернемся к поставленной выше задаче. Передняя стенка резервуара не является весьма малой, и поэтому к ней непосредственно неприменим установленный закон. Для того чтобы все же можно было применить этот закон, поступим следующим образом.

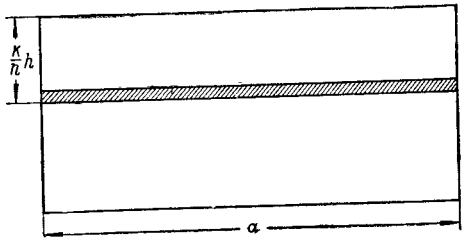

Рис. 2.

Возьмем весьма большое число n и разложим стенку на n одинаковых горизонтальных полосок (рис. 2) ширины $\frac{1}{n}h$ каждая.

Рассмотрим теперь одну из этих „элементарных" полосок, например k-ю сверху. Она очень узка, и мы можем приближенно считать, что все ее точки лежат на одной и той же глубине. Тогда *) давление на нее находится с помощью закона n° 9.

Площадь площадки равна произведению ее длины a на ширину $\frac{1}{n}h$, т. е. равна $\frac{1}{n}ah$. Чтобы получить давление, нужно это число умножить на глубину погружения полоски.

---

*) Рассматривая вывод закона давления, мы видим, что для его справедливости нужно лишь, чтобы все точки площадки лежали (хотя бы приближенно) на одинаковой глубине. Поэтому закон применим к узкой горизонтальной полоске, хотя, благодаря ее длине, она и не может считаться „малой".

Для k-й сверху полоски эта глубина равна $\frac{k}{n}h$ *). Таким образом, давление P_k на k-ю полоску („элементарное" давление) равно

$$P_k = \frac{ah^2}{n^2}k.$$

Чтобы определить давление P на *всю* стенку, нужно сложить давление на отдельные полоски, что дает

$$P = \sum_{k=1}^{n} \frac{ah^2}{n^2}k, \quad \text{или} \quad P = \frac{ah^2}{n^2}\sum_{k=1}^{n} k.$$

Пользуясь формулой (8), мы можем давление P представить так:

$$P = \frac{ah^2}{n^2} \cdot \frac{n(n+1)}{2},$$

или же так:

$$P = \frac{ah^2}{2}\left(1 + \frac{1}{n}\right),$$

откуда, наконец,

$$P = \frac{ah^2}{2} + \frac{ah^2}{2} \cdot \frac{1}{n}. \tag{14}$$

Однако найденное выражение давления не является вполне точным. Ведь на самом-то деле, хотя полоски и очень узкие, все же даже и в пределах одной полоски различные точки лежат на различных глубинах.

Чтобы указать на приближенный характер равенства двух чисел A и B, в математике часто употребляют обозначение

$$A \doteq B,$$

ставя над знаком равенства точку. Поэтому и мы перепишем соотношение (14) в виде

$$P \doteq \frac{ah^2}{2} + \frac{ah^2}{2} \cdot \frac{1}{n}. \tag{14'}$$

Вместе с тем нам ясно, что чем уже взятые полоски, т. е. чем больше число n, тем более точным оказывается равен-

---

*) Величина $\frac{k}{n}h$ есть глубина *нижней кромки* k-й полоски, но так как мы пренебрегаем различием глубины отдельных точек полоски, то и принимаем эту величину за глубину погружения всей полоски. Ниже мы неоднократно будем иметь дело с подобным же положением вещей.

ство (14′). Стало быть, если мы будем все больше и больше увеличивать число n, то будем получать из (14′) все более и более точные выражения для давления P. Таким образом, истинное, точное значение давления является *пределом* *), к которому приближается величина

$$\frac{ah^2}{2}+\frac{ah^2}{2}\cdot\frac{1}{n},$$

когда n неограниченно возрастает. Но непосредственно ясно, что с увеличением n число $\frac{1}{n}$, а с ним и $\frac{ah^2}{2}\cdot\frac{1}{n}$ делается все меньше и меньше, стремясь к нулю. Поэтому *пределом* величины $\frac{ah^2}{2}+\frac{ah^2}{2}\cdot\frac{1}{n}$ служит первое ее слагаемое $\frac{ah^2}{2}$, которое и дает нам совершенно точное выражение давления

$$P=\frac{ah^2}{2}.$$

Итак, задача решена.

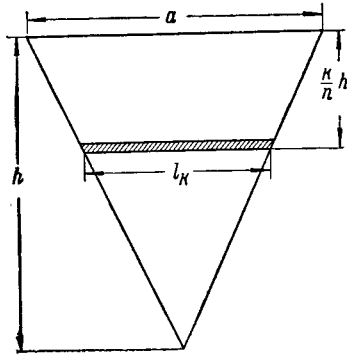

Рис. 3.

11°. Давление на треугольный щит. Поставим теперь другую задачу того же рода.

Именно, постараемся определить давление воды на треугольный щит, вертикально опущенный в воду так, что основание треугольника находится на уровне свободной поверхности жидкости (рис. 3).

Для решения этой задачи мы, исходя из соображений, подробно изложенных в предыдущем пункте, и здесь разложим щит на n весьма узких горизонтальных полосок — „элементарных“ полосок — ширины $\frac{1}{n}h$ каждая и определим все давление как сумму давлений на отдельные полоски.

Возьмем отдельную, k-ю сверху, полоску и подсчитаем давление на нее. Пренебрегая шириной полоски, мы можем

*) Напомним, что пределом переменной величины x_n называется постоянное число l, обладающее тем свойством, что абсолютная величина разности x_n-l для всех достаточно больших значений n оказывается меньшей любого наперед заданного положительного числа.

считать, что все ее точки находятся на одной и той же глубине, равной $\frac{k}{n}h$. „Элементарное“ давление, т. е. давление P_k на полоску с номером k, получится путем перемножения этой глубины и площади полоски. Эту площадь можно определить как площадь трапеции. Но, очевидно, что для узкой полоски можно с большой степенью точности считать, что ее форма есть *прямоугольник*. Это упрощает нахождение площади. Правда, при этом происходит некоторая погрешность, но эта погрешность тем менее ощутительна, чем уже полоски, а мы уже из предыдущего примера знаем, что нам все равно предстоит неограниченно уменьшать ширину полосок, так что указанная погрешность не отразится на окончательном результате. Здесь мы сталкиваемся с идеей очень общего характера, постоянно применяемой при решении самых разнообразных задач: *при подсчете элементарного слагаемого обращать главное внимание на простоту его выражения, пренебрегая в целях указанной простоты частями этого слагаемого, лишь бы эти неучтенные части были ничтожно малы по сравнению с тем, что принято во внимание*. С помощью теории пределов этот принцип можно было бы высказать в более точной и строгой форме, чего мы, однако, делать не станем, имея в виду, что существо дела достаточно разъяснится в дальнейших примерах.

Приняв k-ю полоску за прямоугольник, мы найдем его площадь как произведение его длины и ширины. Ширина, очевидно, есть $\frac{1}{n}h$, а длина l_k (значок k указывает, что речь идет именно о k-й полоске) находится, как это видно из рис. 3, из подобия треугольников с помощью пропорции

$$l_k : a = \left(h - \frac{k}{n}h\right) : h, \quad \text{откуда} \quad l_k = \left(1 - \frac{k}{n}\right)a.$$

Таким образом, площадь полоски есть

$$\left(1 - \frac{k}{n}\right)a \cdot \frac{1}{n}h,$$

а давление на нее

$$P_k \doteq \frac{ah^2}{n^2}\left(1 - \frac{k}{n}\right)k.$$

Все давление найдется суммированием найденных величин

$$P \doteq \sum_{k=1}^{n} \frac{ah^2}{n^2}\left(1 - \frac{k}{n}\right)k, \quad \text{или} \quad P \doteq \frac{ah^2}{n^2}\sum_{k=1}^{n} k - \frac{ah^2}{n^3}\sum_{k=1}^{n} k^2.$$

Пользуясь формулами (8) и (9), мы можем дать этому выражению вид:

$$P = \frac{ah^2}{n^2} \cdot \frac{n(n+1)}{2} - \frac{ah^2}{n^3} \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{6},$$

или же

$$P = \frac{ah^2}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right) - \frac{ah^2}{6}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right).$$

Это выражение для давления приближенное. Оно имеет тем бо́льшую точность, чем больше число n. Значит, для нахождения точного значения давления нужно в правой части этого равенства неограниченно увеличивать n и найти *предел* этой правой части. Так как увеличение числа n влечет за собой стремление к нулю дроби $\frac{1}{n}$, то множители $1+\frac{1}{n}$ и $2+\frac{1}{n}$ стремятся соответственно к 1 и 2; поэтому (на основании теорем о пределе произведения и разности) все написанное выше выражение имеет пределом число $\frac{ah^2}{2} - \frac{ah^2}{6} \cdot 2$.

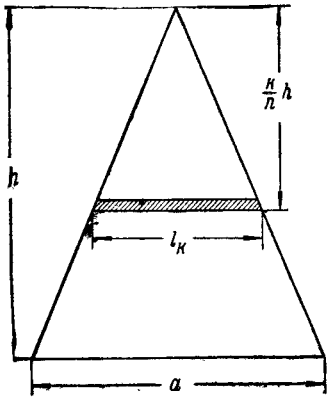

Рис. 4.

Таким образом,

$$P = \frac{ah^2}{2} - \frac{ah^2}{3}$$

и, окончательно,

$$P = \frac{ah^2}{6}.$$

Это есть *точная* величина давления.

12°. Найдем давление на вертикальный щит той же формы, но погруженный в воду так, что на уровне поверхности воды находится его вершина, а основание параллельно поверхности (рис. 4).

Разлагая щит на горизонтальные полоски ширины $\frac{1}{n}h$ и принимая каждую такую полоску за прямоугольник, мы найдем длину k-й полоски из подобия треугольников

$$l_k : a = \frac{k}{n}h : h, \quad \text{откуда} \quad l_k = \frac{k}{n}a.$$

Отсюда площадь полоски равна $\frac{k}{n^2}ah$, а так как глубина ее погружения есть $\frac{k}{n}h$, то элементарное давление равно

$$P_k \doteq \frac{k^2}{n^3}ah^2.$$

Полное давление получается суммированием всех элементарных:

$$P \doteq \sum_{k=1}^{n} \frac{k^2}{n^3}ah^2 = \frac{ah^2}{n^3}\sum_{k=1}^{n} k^2.$$

С помощью формулы (9) перепишем P так:

$$P \doteq \frac{ah^2}{n^3} \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

или так:

$$P \doteq \frac{ah^2}{6}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right).$$

Точное выражение получится отсюда предельным переходом, когда n неограниченно возрастает; для нахождения этого предела следует повторить рассуждения, приведенные в конце п° 11. Не вдаваясь уже в подробности, отметим лишь, что мы найдем искомый предел, откидывая в скобках слагаемое $\frac{1}{n}$, что дает окончательно

$$P = \frac{ah^2}{3}.$$

13°. Давление на полукруг. В разобранных примерах, очевидно, проводилась одна и та же идея. Она состояла в разложении искомого давления P на элементарные слагаемые P_k. Подсчет одного слагаемого производился упрощенным способом (с пренебрежением разности глубин отдельных точек одной полоски, предположением прямоугольной формы полоски), что позволяло легко найти P_k. После этого все элементарные давления суммировались и находился предел полученной суммы при безграничном увеличении n. При этом для нахождения предела суммы мы использовали формулы (8) и (9) § 1. Однако было бы заблуждением думать, что решение задач указанным способом всегда приводит к простым суммам § 1; наоборот, очень часто мы приходим к гораздо более сложным суммам.

Иллюстрируем это примером. Именно, постараемся определить давление на полукруглый щит (рис. 5), помещенный вертикально в воду, причем свободная поверхность жидкости совпадает с диаметром полукруга.

Применяя уже изложенные соображения, разложим щит на полосы шириной $\frac{1}{n}R$, где R — радиус полукруга.

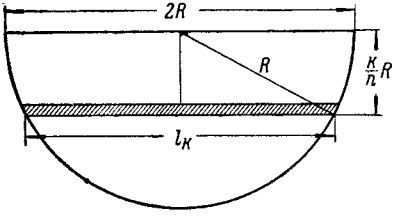

Рис. 5.

И здесь мы примем каждую полоску за прямоугольник. Длина ее определяется с помощью теоремы Пифагора:

$$l_k = 2\sqrt{R^2 - \frac{k^2}{n^2}R^2} = \frac{2R}{n}\sqrt{n^2 - k^2}.$$

В таком случае площадь полоски есть

$$\frac{2R^2}{n^2}\sqrt{n^2 - k^2},$$

а элементарное давление равно

$$P_k \doteq \frac{2R^3}{n^3}k\sqrt{n^2 - k^2}.$$

Приближенное выражение полного давления есть сумма

$$P \doteq \sum_{k=1}^{n}\frac{2R^3}{n^3}k\sqrt{n^2 - k^2}, \quad \text{или} \quad P \doteq \frac{2R^3}{n^3}\sum_{k=1}^{n}k\sqrt{n^2 - k^2},$$

точная же величина его есть *предел* этой суммы при неограниченном возрастании n. Заметим, что, собственно говоря, нас и интересует не сама сумма, а именно ее предел.

Итак,

$$P = 2R^3 \lim\left[\frac{1}{n^3}\sum_{k=1}^{n}k\sqrt{n^2 - k^2}\right], \tag{15}$$

где символ lim и означает предел.

Стало быть, вся проблема была бы решена, если бы мы могли найти предел

$$\lim\left[\frac{1}{n^3}\sum_{k=1}^{n}k\sqrt{n^2 - k^2}\right]. \tag{16}$$

Однако найти этот предел мы сейчас не умеем, а потому не можем и решить поставленной задачи. Ниже, в п° 23, мы дадим способ вычисления предела (16) и решим поставленную задачу.

§ 3. ОПРЕДЕЛЕНИЕ РАБОТЫ ПО ВЫКАЧИВАНИЮ ЖИДКОСТИ ИЗ СОСУДОВ

14°. Выкачивание воды из цилиндрического котла. В этом параграфе мы рассмотрим тип задач, относящихся совсем к другой области физики, но решение которых проводится с помощью того же метода разложения на безгранично возрастающее число бесконечно убывающих, или, как говорят, *бесконечно малых* слагаемых.

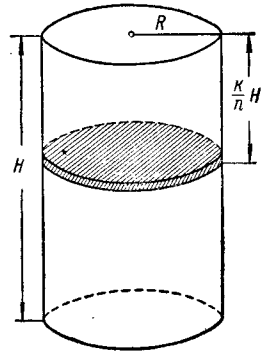

Рис. 6.

В качестве типичного примера рассмотрим такую задачу. Пусть в цилиндрическом котле (рис. 6) находится вода. Допустим, что мы выкачиваем ее с помощью насоса. Требуется определить работу, затрачиваемую на выкачивание всей воды.

Напомним, что работой, затрачиваемой на движение материальной частицы, называется произведение силы, приложенной к частице, на путь, описываемый этой частицей. Обращаясь к нашей задаче, мы замечаем, что для выкачивания частицы жидкости из котла достаточно поднять ее до края котла, так как дальше она уже сама вытечет из него под влиянием силы собственной тяжести. Таким образом, задача сводится к тому, чтобы определить работу, которую нужно затратить на то, чтобы последовательно поднять все частицы жидкости на уровень краев котла.

При этом, очевидно, каждая частица опишет путь, равный глубине ее погружения в котле. Так как сила, которую приходится преодолевать при поднятии, есть *вес* частицы, то работа поднятия одной частицы равна произведению веса частицы на глубину ее погружения. Поскольку речь идет о воде, удельный вес которой равен единице, то вес частицы численно равен ее объему, и, стало быть, *работа поднятия частицы воды равна произведению объема этой частицы на глубину ее погружения.*

Так как в котле различные частицы жидкости находятся на различной глубине, то мы не можем непосредственно применить указанное правило для нахождения работы.

Для того чтобы все же иметь возможность опереться на это правило, мы поступим аналогично тому, как поступали при решении задач предыдущего параграфа. Именно, мы разобьем высоту H цилиндра (рис. 6) на n частей, длины $\frac{1}{n}H$ каждая, и проведем через точки деления плоскости, параллельные основаниям цилиндра. Эти плоскости разрежут всю толщу воды на n „элементарных“ слоев. Приближенно можно считать, что в пределах одного слоя все частицы жидкости находятся на одной и той же глубине. Поэтому, пользуясь указанным выше правилом, мы можем определить работу поднятия одного слоя.

Объем слоя есть объем цилиндра с радиусом R (где R — радиус котла) и высотой $\frac{1}{n}H$, так что он равен

$$\pi R^2 \frac{H}{n}.$$

Если речь идет о k-м сверху слое, то, очевидно, глубина погружения этого слоя есть $\frac{k}{n}H$, так что „элементарная“ работа поднятия k-го слоя равна

$$T_k \doteq \pi R^2 H^2 \frac{k}{n^2}.$$

Это равенство является приближенным, а не точным, потому что на самом деле даже в пределах одного слоя глубина погружения отдельных частиц не равна между собой.

Так как полная работа T определяется с помощью сложения найденных выражений, то

$$T \doteq \sum_{k=1}^{n} \pi R^2 H^2 \frac{k}{n^2}, \qquad \text{или} \qquad T \doteq \pi R^2 H^2 \cdot \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{n} k.$$

На основании формулы (8) имеем:

$$T \doteq \pi R^2 H^2 \cdot \frac{1}{n^2} \cdot \frac{n(n+1)}{2},$$

или

$$T \doteq \frac{\pi R^2 H^2}{2}\left(1 + \frac{1}{n}\right). \tag{17}$$

Легко видеть, что с увеличением числа n точность этого приближенного равенства неограниченно улучшается. Поэтому *точное* выражение работы мы получим, найдя *предел* правой части равенства (17) при безгранично возрастающем n.

Этот предел, очевидно, находится простым отбрасыванием дроби $\frac{1}{n}$, что дает окончательно

$$T = \frac{\pi R^2 H^2}{2}.$$

Если воспользоваться выражением объема цилиндра $V = \pi R^2 H$, то можно представить найденную величину так:

$$T = V\frac{H}{2}.$$

Иначе говоря, интересующая нас работа равна той работе, которую нужно затратить, чтобы приподнять весь котел на половину его высоты.

Замечание. Последнее утверждение можно получить и без всяких вычислений при помощи следующих простых соображений. Совершенно ясно, что работа по удалению среднего $\left(\text{т. е. находящегося на глубине } \frac{1}{2}H\right)$ элементарного слоя равна его объему, умноженному на $\frac{1}{2}H$. Для каждого же элементарного слоя, отличного от среднего, найдется соответствующий ему слой того же объема, находящийся на том же расстоянии от среднего слоя, что и данный, но по другую сторону от среднего слоя. Если расстояния этих слоев от среднего слоя равны d, то один из них придется поднимать на высоту $\frac{1}{2}H + d$, а другой — на высоту $\frac{1}{2}H - d$. Поэтому, если каждый из рассматриваемых слоев имеет объем V, то сумма работ по удалению их из котла будет равна

$$V\left(\frac{1}{2}H + d\right) + V\left(\frac{1}{2}H - d\right) = VH.$$

Это значит, что работа по удалению упомянутой пары слоев не изменится, если оба эти слоя переместить на глубину $\frac{1}{2}H$. Иными словами, можно считать, что вся вода

находится на глубине $\frac{1}{2}H$, а тогда формула

$$T=\frac{1}{2}VH$$

становится вполне очевидной.

15°. Выкачивание воды из воронки. В качестве второго примера рассмотрим аналогичную задачу определения работы выкачивания воды из *конической воронки* (рис. 7).

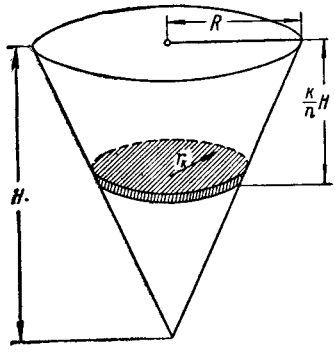

Рис. 7.

Как и выше, разложим всю массу воды на n слоев толщины $\frac{1}{n}H$ каждый. Элементарная работа равна глубине слоя, умноженной на его объем. Этот объем есть объем усеченного конуса. Однако гораздо удобнее подсчитать его, приняв слой за цилиндр. Это заведомо не точно, но вносит упрощения в выкладки. Аналогично тому, как это изложено в п° 11, мы убедимся в том, что в процессе возрастания числа n погрешность, происходящая от этого неточного допущения, исчезает, и, таким образом, остаются одни лишь его преимущества.

Обозначая радиус k-го сверху слоя через r_k, мы найдем, что объем его есть

$$\pi r_k^2\frac{1}{n}H.$$

Так как глубина погружения слоя есть $\frac{k}{n}H$, то элементарная работа равна

$$T_k\doteq\pi r_k^2H^2\frac{k}{n^2}.$$

В это выражение входит величина r_k; выразим эту величину через элементы конуса. Из подобия треугольников имеем

$$r_k:R=\left(H-\frac{k}{n}H\right):H,$$

откуда

$$r_k = \left(1 - \frac{k}{n}\right) R.$$

Подставляя это в выражение элементарной работы, найдем

$$T_k \doteq \pi R^2 H^2 \left(1 - \frac{k}{n}\right)^2 \frac{k}{n^2}.$$

Полная интересующая нас работа равна сумме найденных элементарных работ, т. е.

$$T \doteq \sum_{k=1}^{n} \pi R^2 H^2 \left(1 - \frac{k}{n}\right)^2 \frac{k}{n^2},$$

или

$$T \doteq \pi R^2 H^2 \left[\frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{n} k - \frac{2}{n^3} \sum_{k=1}^{n} k^2 + \frac{1}{n^4} \sum_{k=1}^{n} k^3\right].$$

Воспользовавшись формулами (8), (9), (10), дадим найденному выражению вид

$$T \doteq \pi R^2 H^2 \left[\frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{n}\right) - \frac{1}{3}\left(1 + \frac{1}{n}\right)\left(2 + \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{4}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^2\right].$$

Это выражение только приближенное, так как и слои не цилиндрические и глубина разных точек каждого слоя различна. Однако безгранично увеличивая n и беря *предел* правой части, мы найдем точное значение работы

$$T = \pi R^2 H^2 \left(\frac{1}{2} - \frac{2}{3} + \frac{1}{4}\right)$$

и, окончательно,

$$T = \frac{1}{12} \pi R^2 H^2.$$

Если вспомнить *), что объем конуса равен

$$V = \frac{1}{3} \pi R^2 H,$$

то найденную работу можно представить в виде

$$T = V \cdot \frac{H}{4},$$

*) Эта формула, между прочим, устанавливается в п° 18.

т. е. оказывается, что она равна работе, необходимой для поднятия всей воронки на четверть ее высоты.

16°. Выкачивание воды из полушара. Решим еще одну задачу того же рода. Именно, определим работу, которую необходимо затратить, чтобы выкачать воду из сосуда, имеющего форму полушара (рис. 8). Поступая как и выше, мы разложим всю массу воды на n горизонтальных слоев толщины $\frac{1}{n}R$ каждый.

Принимая каждый такой слой за *цилиндр* радиуса r_k (если речь идет о k-м слое), мы видим, что объем его есть

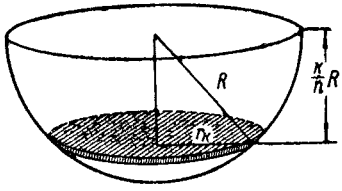

Рис. 8.

$$V_k \doteq \pi r_k^2 \frac{1}{n} R,$$

и, следовательно, элементарная работа такова:

$$T_k \doteq \pi r_k^2 \frac{k}{n^2} R^2.$$

Выразим теперь радиус r_k k-го слоя через радиус R шара. Как нетрудно усмотреть из чертежа, для этой цели можно воспользоваться теоремой Пифагора, которая дает

$$r_k^2 = R^2 - \left(\frac{k}{n} R\right)^2.$$

Отсюда

$$T_k \doteq \pi R^4 \left(1 - \frac{k^2}{n^2}\right) \frac{k}{n^2}.$$

Полная работа находится суммированием всех элементарных

$$T \doteq \sum_{k=1}^{n} \pi R^4 \left(1 - \frac{k^2}{n^2}\right) \frac{k}{n^2},$$

или

$$T \doteq \pi R^4 \left[\frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{n} k - \frac{1}{n^4} \sum_{k=1}^{n} k^3\right],$$

откуда, на основании формул § 1, имеем

$$T \doteq \pi R^4 \left[\frac{1}{n^2} \cdot \frac{n(n+1)}{2} - \frac{1}{n^4} \cdot \frac{n^2(n+1)^2}{4}\right],$$

или

$$T \doteq \pi R^4 \left[\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right)-\frac{1}{4}\left(1+\frac{1}{n}\right)^2\right].$$

Это приближенное выражение работы переходит в точное, если отбросить $\frac{1}{n}$, что дает

$$T = \pi R^4 \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)$$

и, окончательно,

$$T = \frac{1}{2}\pi R^4.$$

17°. Выкачивание воды из корыта. В заключение этого параграфа рассмотрим задачу определения работы выкачивания воды из корыта, т. е. из сосуда, имеющего форму полуцилиндра (рис. 9).

Применяя всё тот же метод разложения на бесконечно малые слагаемые, мы разрежем всю массу воды на n узких

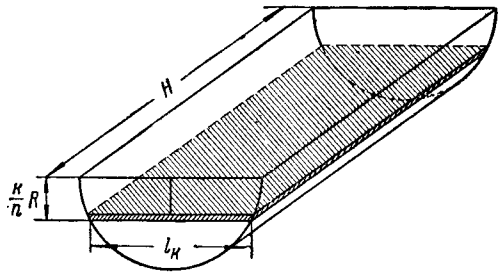

Рис. 9.

горизонтальных слоев, имеющих форму прямоугольных плит (черт. 9). Объем одной такой плиты равен

$$V_k \doteq H l_k \frac{R}{n},$$

где через l_k обозначена ее ширина. Эта ширина l_k по теореме Пифагора (как хорда окружности, отстоящая от центра на расстояние $\frac{k}{n}R$) равна

$$l_k = 2\sqrt{R^2-\left(\frac{k}{n}R\right)^2},$$

так что объем плиты равен

$$V_k \doteq 2R^2H\frac{1}{n^2}\sqrt{n^2-k^2}.$$

Отсюда элементарная работа выкачивания есть

$$T_k \doteq 2R^3H\frac{k}{n^3}\sqrt{n^2-k^2},$$

а полная работа

$$T \doteq \sum_{k=1}^{n} 2R^3H\frac{k}{n^3}\sqrt{n^2-k^2},$$

или

$$T \doteq 2R^3H\frac{1}{n^3}\sum_{k=1}^{n} k\sqrt{n^2-k^2}. \qquad (18)$$

Найденное выражение является, однако, лишь приближенным. Для нахождения точного значения работы надлежит неограниченно увеличивать n и найти *предел* правой части равенства (18)

$$T = 2R^3H \cdot \lim\left[\frac{1}{n^3}\sum_{k=1}^{n} k\sqrt{n^2-k^2}\right]. \qquad (19)$$

Таким образом, дело сводится к нахождению предела

$$\lim\left[\frac{1}{n^3}\cdot\sum_{k=1}^{n} k\sqrt{n^2-k^2}\right] \qquad (20)$$

при неограниченном возрастании n. Обращаясь к n° 13, мы видим, что этот предел совпадает с пределом (16). Мы не умеем сейчас найти этот предел, а потому решение уже двух различных физических проблем не может быть доведено до конца. Как уже указывалось в n° 13, ниже, в n° 23, мы найдем предел (20) и тем самым решим обе задачи.

§ 4. НАХОЖДЕНИЕ ОБЪЕМОВ

18°. Объем конуса. Методы, развитые выше, находят себе широкое применение при решении целого ряда геометрических задач. В настоящем параграфе мы покажем при-

менение этих методов при нахождении объема различных тел *).

Поставим прежде всего задачу нахождения *объема конуса*. Для решения этой задачи разделим (рис. 10) высоту конуса на n частей длины $\frac{1}{n} H$ каждая и через точки деления проведем плоскости, параллельные основанию конуса. Эти плоскости разрежут весь конус на n слоев. Примем приближенно каждый из этих слоев (который на самом деле есть усеченный конус) за цилиндр. Это, разумеется, не точно, но при большом значении n погрешность почти совершенно неощутима.

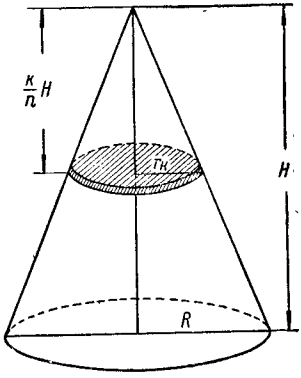

Рис. 10.

Обозначив радиус k-го сверху элементарного цилиндра через r_k, мы найдем, что объем этого цилиндра равен

$$V_k \doteq \pi r_k^2 \frac{H}{n}.$$

Из подобия треугольников имеем

$$r_k : R = \frac{k}{n} H : H,$$

откуда

$$r_k \doteq \frac{k}{n} R,$$

и выражение элементарного объема принимает вид:

$$V_k \doteq \pi R^2 H \frac{k^2}{n^3},$$

так что весь объем равен

$$V \doteq \sum_{k=1}^{n} \pi R^2 H \frac{k^2}{n^3},$$

или

$$V \doteq \pi R^2 H \cdot \frac{1}{n^3} \sum_{k=1}^{n} k^2,$$

*) Так как нас интересует, главным образом, чисто вычислительная сторона дела, то мы здесь не останавливаемся на вопросе о точном *определении* понятия объема. Как известно, для подобного определения также необходимо использовать понятие предела.

что на основании формулы (9) равно

$$V \doteq \pi R^2 H \frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3},$$

или

$$V \doteq \pi R^2 H \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right)}{6}. \qquad (21)$$

Это значение объема не точное, а только приближенное, ибо, как уже указано, отдельные слои не являются на самом деле цилиндрами. Однако чем больше число n, тем точнее найденное выражение, так что истинное значение V есть *предел* правой части равенства (21) при неограниченном возрастании n. Этот предел, очевидно, получается из (21) отбрасыванием дроби $\frac{1}{n}$, так что

$$V = \pi R^2 H \cdot \frac{1 \cdot 2}{6}$$

и, окончательно,

$$V = \frac{1}{3}\pi R^2 H.$$

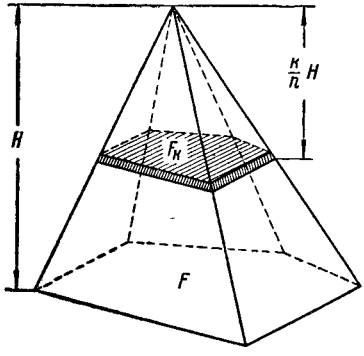

Рис. 11.

Таким образом, *объем конуса равен одной трети произведения площади его основания на высоту.*

19°. Объем пирамиды. Сходные рассуждения позволяют найти объем пирамиды. Рассмотрим (рис. 11) пирамиду высоты H, площадь основания которой есть F. Разделив высоту на n равных частей и проведя через точки деления плоскости, параллельные основанию, мы разрежем пирамиду на n призматических плиток высоты $\frac{1}{n}H$ каждая (строго говоря, эти плитки не призматические, а являются усеченными пирамидами, но, как и выше, их можно приближенно принять за призматические).

Если площадь k-й сверху плитки есть F_k, то нетрудно усмотреть, что имеет место пропорция

$$F_k : F = k^2 : n^2,$$

так что

$$F_k = \frac{k^2}{n^2} F,$$

и, стало быть, объем одной плитки равен

$$V_k \doteq F_k \cdot \frac{H}{n} = \frac{k^2}{n^3} FH.$$

Объем всей пирамиды равен сумме элементарных объемов:

$$V \doteq \frac{FH}{n^3} \sum_{k=1}^{n} k^2,$$

или [на основании формулы (9)]

$$V \doteq \frac{FH}{6}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right).$$

Увеличивая неограниченно n и беря предел правой части, найдем точное равенство

$$V = \frac{1}{3} FH,$$

так что, аналогично объему конуса, *объем пирамиды равен одной трети произведения площади ее основания на высоту.*

20°. Объем шара. Найдем теперь объем шара. Очевидно, задача будет решена, если мы ограничимся рассмотрением *полушара* и затем удвоим результат. Разлагая полушар (рис. 12) рядом плоскостей на n слоев толщины $\frac{1}{n} R$ каждый, мы примем эти слои за цилиндры. Если радиус k-го слоя есть r_k, то объем его, как объем цилиндра, равен

$$V_k \doteq \pi r_k^2 \frac{R}{n}.$$

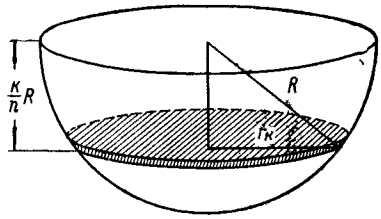

Рис. 12

Теорема Пифагора дает

$$r_k^2 = R^2 - \frac{k^2}{n^2} R^2,$$

так что выражение элементарного объема принимает вид

$$V_k \doteq \pi R^3 \left(1 - \frac{k^2}{n^2}\right) \frac{1}{n},$$

а объем V^* всего полушара есть сумма всех V_k:

$$V^* \doteq \pi R^3 \left[\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} - \frac{1}{n^3} \sum_{k=1}^{n} k^2\right],$$

что на основании свойств, указанных в § 1, равно

$$V^* \doteq \pi R^3 \cdot \frac{6-\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right)}{6}.$$

Предел этого выражения при безгранично возрастающем n дает точную величину объема полушара

$$V^* = \frac{2}{3}\pi R^3,$$

откуда объем всего шара

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3.$$

21°. Объем общей части двух цилиндров. Теперь мы решим более трудную задачу. Рассмотрим два цилиндра одинакового радиуса, оси которых пересекаются под прямым углом (рис. 13). Поставим задачей найти объем тела, *являющегося общей частью обоих цилиндров*. Трудность этой задачи заключается в сложности изучаемого тела и связанной с этим затруднительности отчетливого его представления. Однако можно решить эту задачу и не представляя себе всего тела.

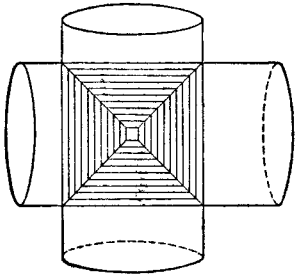

Рис. 13.

Для этой цели вообразим себе плоскость, проходящую через оси обоих цилиндров; назовем ее „осевой" плоскостью. Эта плоскость (если считать ее совпадающей с плоскостью чертежа) делит тело на две равные половины: „переднюю" и „заднюю". Ограничимся изучением одной из них, например передней, так как они, очевидно, одинаковы.

Представим себе теперь какую-либо плоскость, параллельную осевой. Она пересечет каждый из цилиндров по полосе, причем, очевидно, эти полосы в обоих цилиндрах имеют одинаковую ширину. Поэтому изучаемое тело в пересечении с этой плоскостью дает *квадрат*.

Установив это, уже нетрудно решить задачу. Именно, восставим из точки пересечения осей цилиндров перпендикуляр к осевой плоскости. Длина отрезка его, заключающегося в передней половине интересующего нас тела, равна R. Разделим этот отрезок на n частей и проведем через точки

деления плоскости, параллельные осевой. Эти плоскости разрежут переднюю половину изучаемого тела на n квадратных плиток толщины $\frac{1}{n}R$ каждая.

Как нетрудно усмотреть из рис. 14, на котором изучаемое тело изображено сверху, сторона k-го квадрата равна

$$l_k = 2\sqrt{R^2 - \left(\frac{k}{n}R\right)^2}$$

и поэтому площадь его есть

$$l_k^2 = 4R^2\left(1 - \frac{k^2}{n^2}\right),$$

а объем k-й плитки

$$V_k \doteq l_k^2 \cdot \frac{R}{n} = 4R^3\left(1 - \frac{k^2}{n^2}\right)\frac{1}{n}.$$

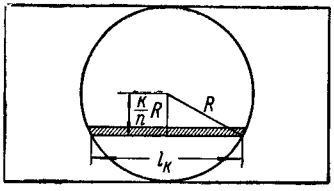

Рис. 14.

Объем V^* всей передней половины тела есть сумма всех V_k, т. е.

$$V^* \doteq \sum_{k=1}^{n} 4R^3\left(1 - \frac{k^2}{n^2}\right)\frac{1}{n},$$

откуда

$$V^* \doteq 4R^3\left[\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n} - \frac{1}{n^3}\sum_{k=2}^{n}k^2\right],$$

или

$$V^* \doteq 4R^3\left[1 - \frac{1}{6}\left(1 + \frac{1}{n}\right)\left(2 + \frac{1}{n}\right)\right].$$

Это приближенное равенство переходит в точное при неограниченном возрастании n.

Таким образом, объем передней половины тела равен

$$V^* = \frac{8}{3}R^3.$$

Весь же объем V находится путем удвоения этого числа, т. е.

$$V = \frac{16}{3}R^3,$$

что и решает задачу. Любопытно, что, несмотря на довольно сложный характер тела, объем его выразился без каких бы то ни было иррациональностей.

22°. Объем цилиндрического отрезка. Рассмотрим так называемый „цилиндрический отрезок" — тело, отсекаемое от цилиндра плоскостью, проходящий через диаметр его основания (рис. 15). Пусть (мы придерживаемся обозначений чертежа) $AB = H$, $OA = R$. Выразим объем отрезка через H и R.

Для этого разделим радиус OK на n частей и через точки деления проведем плоскости, параллельные плоскости треугольника OAB. Эти плоскости разрежут одну из половин цилиндрического отрезка на n треугольных плиток толщины $\frac{1}{n}R$ каждая. Одна из этих плиток $O_1A_1B_1$ изображена на чертеже. Найдем объем k-й плитки, принимая ее за призматическую.

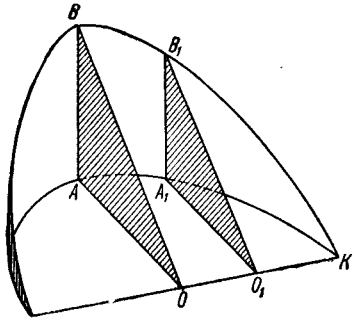

Рис. 15.

Пусть $O_1A_1B_1$ — как раз k-я плитка, так что

$$OO_1 = \frac{k}{n}R.$$

Из теоремы Пифагора легко найти, что

$$O_1A_1 = \sqrt{OA_1^2 - OO_1^2}.$$

Иначе говоря,

$$O_1A_1 = R\sqrt{1 - \frac{k^2}{n^2}}.$$

Далее, из подобия треугольников OAB и $O_1A_1B_1$ имеем:

$$A_1B_1 : AB = O_1A_1 : OA,$$

или

$$A_1B_1 : H = R\sqrt{1 - \frac{k^2}{n^2}} : R,$$

откуда

$$A_1B_1 = H\sqrt{1 - \frac{k^2}{n^2}}.$$

Площадь треугольника $O_1A_1B_1$ равна $\frac{1}{2}O_1A_1 \cdot A_1B_1$ и, стало быть, равна

$$\frac{1}{2}RH\left(1 - \frac{k^2}{n^2}\right).$$

Объем k-й плитки получится умножением этой площади на толщину плитки, т. е. на $\frac{1}{n}R$. Значит, элементарный объем равен

$$V_k \doteq \frac{1}{2}R^2H\left(\frac{1}{n} - \frac{k^2}{n^3}\right),$$

а объем V^* всей половины отрезка:

$$V^* \doteq \frac{1}{2}R^2H\left[\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n} - \sum_{k=1}^{n}\frac{k^2}{n^3}\right],$$

или же

$$V^* \doteq \frac{1}{2}R^2H\left[1 - \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right)}{6}\right].$$

Предел этого выражения дает точную величину объема половины отрезка

$$V^* = \frac{1}{3}R^2H,$$

откуда объем всего отрезка есть

$$V = \frac{2}{3}R^2H. \qquad (22)$$

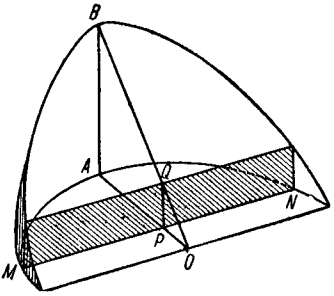

Рис. 16.

23°. Другой способ решения. Попробуем решать ту же задачу другим способом. Именно, разделим радиус OA на n частей (рис. 16) и проведем через точки деления плоскости, перпендикулярные этому радиусу. Они разрежут весь цилиндрический отрезок на n прямоугольных плиток, вроде заштрихованной на чертеже.

Рассмотрим, чему равен объем k-й плитки (мы принимаем их за призматические) Толщина каждой из них равна $\frac{1}{n}R$, так что дело сводится к нахождению площади отдельной плитки.

Считая, что заштрихованная полоска и есть k-я, мы имеем

$$OP = \frac{k}{n}R.$$

В таком случае, по теореме Пифагора, хорда MN равна

$$MN = 2\sqrt{R^2 - \frac{k^2}{n^2}R^2}.$$

Из подобия треугольников OPQ и OAB имеем

$$PQ : OP = AB : OA,$$

или

$$PQ : \frac{k}{n}R = H : R,$$

так что

$$PQ = \frac{k}{n}H,$$

и площадь прямоугольника, равная $PQ \cdot MN$, имеет вид

$$2RH\frac{k}{n}\sqrt{1 - \frac{k^2}{n^2}}.$$

Стало быть, элементарный объем равен

$$V_k \doteq 2R^2H \cdot \frac{k}{n^3}\sqrt{n^2 - k^2}.$$

Отсюда весь объем равен сумме

$$V \doteq 2R^2H \cdot \frac{1}{n^3}\sum_{k=1}^{n} k\sqrt{n^2 - k^2}.$$

Однако это равенство лишь приближенное, и мы получим из него *точное*, если заменим правую часть ее *пределом* при безгранично возрастающем n. Это дает

$$V = 2R^2H \lim\left[\frac{1}{n^3}\sum_{k=1}^{n} k\sqrt{n^2 - k^2}\right]. \qquad (23)$$

Здесь мы уже в третий раз сталкиваемся с пределом

$$\lim\left[\frac{1}{n^3}\sum_{k=1}^{n} k\sqrt{n^2 - k^2}\right].$$

Мы не знаем, с помощью каких вычислительных операций можно найти указанный предел и, следовательно, не можем решить задачу по этому способу. Наоборот, сопоставляя выражения (22) и (23), мы можем определить величину

интересующего нас предела. Именно, сокращая на $2R^2H$, мы сразу получаем, что

$$\lim\left[\frac{1}{n^3}\sum_{k=1}^{n} k\sqrt{n^2-k^2}\right]=\frac{1}{3}. \qquad (24)$$

Итак, мы, наконец, установили этот предел.

Возвращаясь к п° 13, подставим найденный предел в равенство (15) и сразу найдем искомое давление

$$P=\frac{2}{3}R^3.$$

Точно так же, подставляя этот предел в равенство (19) п° 17, мы найдем интересовавшую нас работу

$$T=\frac{2}{3}R^3H.$$

24°. Общие замечания. Все приведенные выше задачи решены, в сущности говоря, одним и тем же методом. Этот метод состоит в следующем: подлежащая определению величина представляется в виде суммы большого числа весьма малых слагаемых той же природы. Эти малые, „элементарные", слагаемые подсчитываются приближенно, но с таким расчетом, чтобы при увеличении числа слагаемых точность их выражения повышалась. Тогда вся интересующая нас величина находится суммированием найденных выражений элементарных слагаемых. Полученное значение искомой величины в виде суммы оказывается, однако, неточным, и, чтобы найти точное ее значение, приходится рассматривать *предел* найденной суммы при неограниченном уменьшении элементарных слагаемых.

Коротко говоря, изложенный метод состоит в представлении искомой величины в форме *предела суммы безгранично возрастающего числа безгранично убывающих слагаемых*, или, как чаще говорят, в форме *суммы бесконечно большого числа бесконечно малых слагаемых*.

Этот метод является одним из наиболее важных методов высшей математики; он изучается в том ее отделе, который называется *интегральным исчислением*. В этом отделе как раз и рассматриваются пределы сумм безгранично возрастающего числа безгранично убывающих слагаемых. Эти пределы и называются *интегралами*. Таким образом, просматривая решения задач предшествующих параграфов, мы можем

сказать, что в каждой из них нам приходилось вычислять тот или иной интеграл.

Те суммы, которые мы рассматривали, имели очень простой вид. Именно, это были суммы следующих трех видов:

$$\sum_{k=1}^{n} k, \quad \sum_{k=1}^{n} k^2, \quad \sum_{k=1}^{n} k^3.$$

При нахождении каждой из этих сумм мы ссылались на соответствующую формулу § 1. Когда же нам пришлось столкнуться с суммой более сложного вида

$$\frac{1}{n^3}\sum_{k=1}^{n} k\sqrt{n^2-k^2},$$

то только искусственное рассуждение позволило найти ее предел, так что если бы мы не напали на счастливую мысль решить задачу n° 22 двумя способами, то не нашли бы этого предела и не решили задач n° 13 и n° 17. В интегральном исчислении излагаются *общие способы* нахождения пределов сумм даже очень сложного вида, так что решение подобного рода задач чрезвычайно облегчается и, так сказать, „механизируется".

Математики не сразу нашли эти общие способы, напротив, их нахождение было результатом коллективной работы многих десятков поколений. Современную форму эти способы приняли в работах Лейбница (1646—1716) и Ньютона (1642—1727), однако сама идея разложения на бесконечно большое число бесконечно малых слагаемых была известна задолго до них. Строго говоря, эта идея была уже известна математикам древней Греции (главным образом Архимеду, 287—212 до н. э.). В частности, Архимед знал объем шара, конуса, их частей и даже объем „цилиндрического отрезка".

В эпоху средневековья научная мысль находилась в состоянии глубокого упадка и лишь с начала XVI в. опять стало развиваться естествознание и, в частности, математика. Первое время ученые лишь наново переоткрывали результаты античной древности, но затем постепенно они стали уходить дальше греков. Это относится и к интересующему нас методу суммирования бесконечно малых. Метод этот получил крупное продвижение в работах Кеплера „Стереометрия винных бочек" (1615) и Кавальери „Геометрия неделимых" (1635).

Однако оба последних автора еще не имеют *общих* способов нахождения пределов сумм или интегралов. Таким образом, то изложение, которое дано в нашей книжке, по характеру материала приближается именно к работам Кеплера и Кавальери (существенно отличаясь от них формой изложения).

В позднейших изысканиях постепенно находились все более и более общие способы отыскания интегралов, и, как уже указано, в полной общности эта задача была решена Лейбницем и Ньютоном (самый термин „интеграл" принадлежит школе Лейбница и был введен в 1690 г.).

25°. Принцип Кавальери. Не умея находить пределы сумм сложного вида, Кавальери открыл весьма полезный принцип, который в ряде случаев помогал ему избегать вычисления этих сумм. Этот принцип имеет следующую формулировку:

Если два тела, содержащиеся между параллельными плоскостями P и Q (рис. 17), *обладают тем свойством, что в сечении их любой плоскостью R, параллельной P и Q, всегда получаются равновеликие фигуры, то объемы этих тел равны.*

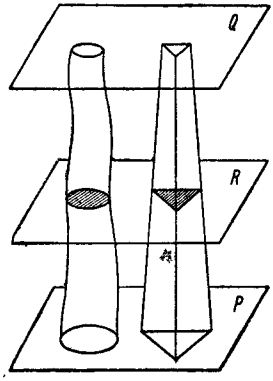

Рис. 17.

Для доказательства этого принципа проведем $n-1$ плоскость, параллельную P и Q. Эти плоскости разрежут оба тела на n пластинок.

Если мы приближенно примем, что эти пластинки имеют цилиндрическую или призматическую форму, то найдем, что объемы их одинаковы. А потому одинаковы и объемы исходных тел, так как они оба получаются суммированием объемов пластинок. Это равенство объемов сначала представляется нам лишь приближенным, но так как оно осуществляется с любой степенью точности, то мы убеждаемся, что оно абсолютно точное.

Нетрудно обобщить этот принцип, показав, что если в сечении обоих тел получаются фигуры, площади которых находятся в одном и том же *отношении*, то и объемы тел находятся в том же отношении. Не составляет труда установить подобный же принцип и для площадей.

Формулировка принципа для этого случая такова:

Если две плоские фигуры I и II, содержащиеся между параллельными прямыми p и q (рис. 18), *обладают тем свойством, что в сечении их любой прямой r, параллельной p и q, получаются отрезки одинаковой длины, то обе фигуры имеют одну и ту же площадь.*

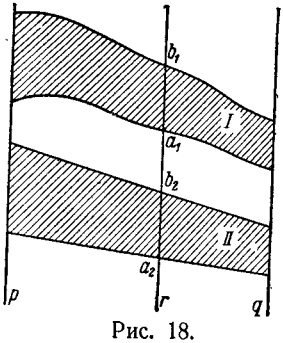

Рис. 18.

Если же отношение отрезков a_1b_1 и a_2b_2 равно числу k, не зависящему от положения прямой r, то и отношение площади фигуры I к площади фигуры II равно k.

Доказательство этих утверждений проводится по той же схеме, что и для случая объемов, и может быть представлено читателю.

§ 5. ПАРАБОЛА И ЭЛЛИПС

26°. Площадь параболы. Рассмотрим линию, уравнение которой в системе прямоугольных координат есть

$$y = ax^2. \tag{25}$$

Эта линия называется *параболой*; она имеет вид, изображенный на рис. 19 (мы считаем, что $a > 0$). Возьмем на параболе произвольную точку M и опустим из нее перпендикуляр MP на ось Ox.

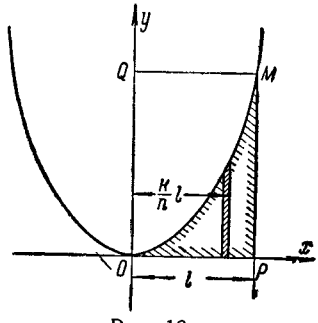

Рис. 19.

Поставим задачу об определении площади F криволинейного треугольника OMP.

Для решения этой задачи разложим отрезок OP на n равных частей и восставим из точек деления перпендикуляры до пересечения с параболой. Эти перпендикуляры разрежут искомую площадь на n узких вертикальных полосок. Приближенно эти элементарные полоски можно считать за прямоугольники. Подсчитаем их площади в этом предположении.

Обозначим всю длину OP через l и рассмотрим k-ю по счету полоску. Ширина ее равна $\frac{1}{n}l$. Что касается ее высоты, то она находится из следующих соображений: расстояние полоски от оси Oy равно $\frac{k}{n}l$, и так как верхний ее край лежит на параболе, то высота полоски, равная ординате точки параболы, согласно уравнению (25), равна

$$a\left(\frac{k}{n}l\right)^2.$$

Отсюда площадь полоски есть

$$al^3\frac{k^2}{n^3},$$

а площадь всего треугольника OMP есть сумма

$$F \doteq \sum_{k=1}^{n} al^3\frac{k^2}{n^3},$$

или

$$F \doteq al^3 \cdot \frac{1}{n^3}\sum_{k=1}^{n} k^2$$

или, наконец,

$$F \doteq \frac{al^3}{6}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right).$$

Чтобы получить отсюда точное равенство нужно неограниченно увеличивать число n. В пределе мы найдем

$$F = \frac{al^3}{3}.$$

Этому результату можно придать простую геометрическую формулировку. Именно, рассмотрим *прямоугольник* $OQMP$. Его площадь, очевидно, равна $OP \cdot PM$. Но $OP = l$; что касается до PM, то это — о р д и н а т а точки M, а б с ц и с с а которой есть l, так что из уравнения параболы следует, что $PM = al^2$.

Поэтому площадь $OQMP$ есть al^3, и, следовательно, *площадь треугольника* OMP *равна одной трети площади прямоугольника* $OQMP$. Отсюда площадь треугольника OQM равна двум третям площади того же прямоугольника.

Эти изящные результаты были найдены впервые Архимедом.

Нахождение величины какой-либо площади называется обычно *квадратурой* этой площади (ибо состоит в сравнении ее с площадью *квадрата*). Таким образом, мы выполнили квадратуру параболы.

27°. Объем параболоида вращения. Допустим, что рассмотренная в предыдущем пункте парабола вращается вокруг оси Oy (рис. 20). Полученная при этом поверхность называется *параболоидом вращения*. Рассмотрим плоскость A, перпендикулярную оси Oy, и определим объем тела, ограниченного параболоидом и этой плоскостью.

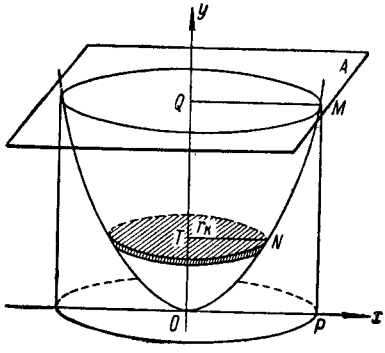

Рис. 20.

Для этой цели разделим отрезок *) OQ на n равных частей и проведем через точки деления плоскости, параллельные плоскости A. Эти плоскости разрежут интересующее нас тело на n слоев, каждый из которых мы примем приближенно за цилиндр. Если расстояние OP по-прежнему обозначить через l, то, как и выше, мы найдем, что $OQ = al^2$. Стало быть, высота каждого элементарного цилиндра есть $\frac{1}{n} al^2$.

Для определения радиуса k-го по счету цилиндра поступим следующим образом: этот радиус $r_k = NT$, очевидно, представляет собою абсциссу точки N параболы. Так как ордината этой точки есть

$$\frac{k}{n} OQ = \frac{k}{n} al^2,$$

то из уравнения параболы мы найдем, что

$$\frac{k}{n} al^2 = ar_k^2,$$

откуда

$$r_k^2 = \frac{k}{n} l^2,$$

*) Мы придерживаемся обозначений рис. 20.

и площадь основания k-го цилиндра есть

$$\pi r_k^2 = \pi l^2 \frac{k}{n}.$$

Отсюда элементарный объем есть

$$V_k \doteq a\pi l^4 \frac{k}{n^2}.$$

Значит, весь искомый объем V есть

$$V \doteq a\pi l^4 \cdot \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{n} k,$$

откуда после простых вычислений найдем

$$V \doteq a\pi l^4 \cdot \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{n}\right).$$

Увеличивая неограниченно n, найдем точное значение объема параболоида вращения:

$$V = \frac{1}{2}\pi a l^4.$$

Сравним этот объем с объемом цилиндра радиуса $R = OP$ и высоты $H = OQ$. Его объем есть

$$\pi R^2 H = \pi (OP)^2 \cdot OQ = \\ = \pi l^2 \cdot al^2 = \pi a l^4.$$

Таким образом, имеем ***теорему Архимеда:***

Объем параболоида вращения равен половине объема цилиндра с тем же основанием и той же высотой.

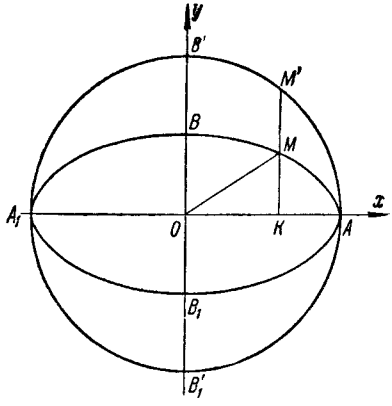

Рис. 21.

28°. Эллипс и его площадь. Рассмотрим очень важную кривую, называемую *эллипсом*. Определение ее таково: *эллипс есть сжатый круг*. Разъясним это выражение.

Рассмотрим окружность некоторого радиуса a. Допустим, что она находится на плоскости, на которой нанесены прямоугольные координаты, и что ее центр совпадает с началом координат (рис. 21). Пусть, далее, ординаты KM' всех

точек M' окружности укорочены в одно и то же число раз, причем коэффициент сжатия есть $q < 1$:

$$KM : KM' = q.$$

Эта операция укорочения преобразует круг $AB'A_1B_1'$ в некоторую другую фигуру, называемую эллипсом. Выведем уравнение эллипса. Если мы обозначим координаты точки M эллипса через x и y, то найдем по определению эллипса:

$$y = q \cdot KM'.$$

Но по теореме Пифагора

$$KM' = \sqrt{(OM')^2 - (OK)^2} = \sqrt{a^2 - x^2},$$

так что

$$y = q\sqrt{a^2 - x^2}.$$

Если мы обозначим отрезок OB через b, то из определения эллипса будем иметь

$$b : a = OB : OB' = q,$$

так что

$$q = \frac{b}{a},$$

и уравнение эллипса приобретает вид:

$$y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2},$$

откуда

$$\frac{y^2}{b^2} = \frac{1}{a^2}(a^2 - x^2)$$

и, окончательно,

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Это — так называемое „каноническое“, или „простейшее“, уравнение эллипса.

Определим площадь эллипса. Пользуясь замечанием к принципу Кавальери, сделанным в конце п° 25, мы сразу можем сказать, что *отношение площади эллипса к площади круга равно коэффициенту сжатия* q, так что, обозначая

площадь эллипса через F, имеем:

$$F : \pi a^2 = q,$$

или

$$F = q\pi a^2.$$

Подставляя сюда значение $q = \frac{b}{a}$, найдем окончательно, что

$$F = \pi ab.$$

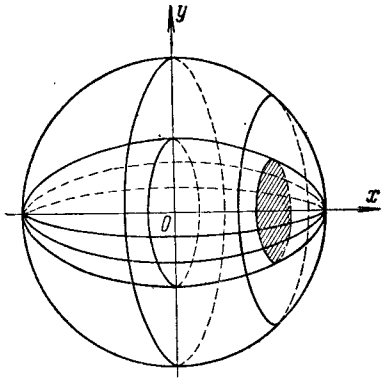

Рис. 22.

Пользуясь принципом Кавальери, мы легко найдем также объем *эллипсоида вращения*, т. е. тела, образованного вращением эллипса вокруг оси Ox (рис. 22). Именно, отношение радиусов кругов, получаемых в сечении эллипсоида плоскостями, перпендикулярными оси Ox, к радиусам сечений шара теми же плоскостями, равно q. Стало быть, отношение их площадей равно q^2. По принципу Кавальери таково же и отношение объемов.

Значит,

$$V : \frac{4}{3}\pi a^3 = q^2 = \frac{b^2}{a^2},$$

так что

$$V = \frac{4}{3}\pi ab^2.$$

§ 6. СИНУСОИДА

29°. Об одной тригонометрической сумме. Для дальнейшего изложения нам понадобится выражение следующей суммы:

$$S = \sum_{k=1}^{n} \sin k\alpha = \sin\alpha + \sin 2\alpha + \ldots + \sin n\alpha, \qquad (26)$$

где α — некоторый определенный угол.

Чтобы найти эту сумму, умножим обе части равенства (26) на $2\sin\frac{\alpha}{2}$:

$$2S\sin\frac{\alpha}{2}=2\sin\alpha\sin\frac{\alpha}{2}+2\sin 2\alpha\sin\frac{\alpha}{2}+\ldots+2\sin n\alpha\sin\frac{\alpha}{2}$$

и применим к каждому слагаемому правой части известную формулу $2\sin A\sin B=\cos(A-B)-\cos(A+B)$.

Это дает, что

$$2S\sin\frac{\alpha}{2}=\left[\cos\frac{\alpha}{2}-\cos\frac{3}{2}\alpha\right]+\left[\cos\frac{3}{2}\alpha-\cos\frac{5}{2}\alpha\right]+$$
$$+\ldots+\left[\cos\frac{2n-1}{2}\alpha-\cos\frac{2n+1}{2}\alpha\right].$$

Легко видеть, что первое слагаемое каждой скобки (кроме первой) сокращается со вторым слагаемым предыдущей скобки. Таким образом,

$$2S\sin\frac{\alpha}{2}=\cos\frac{\alpha}{2}-\cos\frac{2n+1}{2}\alpha. \tag{27}$$

Применяя известную формулу

$$\cos A-\cos B=2\sin\frac{B-A}{2}\sin\frac{A+B}{2},$$

представим (27) в форме

$$2S\sin\frac{\alpha}{2}=2\sin\frac{n\alpha}{2}\sin\frac{(n+1)\alpha}{2},$$

откуда

$$S=\frac{\sin\frac{n\alpha}{2}\sin\frac{(n+1)\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}}.$$

Итак,

$$\sum_{k=1}^{n}\sin k\alpha=\frac{\sin\frac{n\alpha}{2}\sin\frac{(n+1)\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}}. \tag{28}$$

Эту формулу мы и желали установить.

30°. Вспомогательное неравенство. Обозначим через α произвольный угол *), удовлетворяющий условию $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$.

*) Точнее, α есть величина угла в радианах.

В таком случае имеет место следующее двойное неравенство:

$$\operatorname{tg}\alpha > \alpha > \sin\alpha. \tag{29}$$

Для доказательства этого утверждения рассмотрим рис. 23. Из этого рисунка мы непосредственно усматриваем, что треугольник OCA целиком содержится в секторе OCA, который, в свою очередь, целиком содержится в треугольнике OAB. Отсюда следует, что для площадей этих фигур справедливы неравенства:

площ. $\Delta OAB >$

$>$ площ. сект. $OCA >$ площ. ΔOCA.

Иначе говоря,

$$\frac{1}{2}OA \cdot AB > \frac{1}{2}R \cdot \overset{\smile}{CA} > \frac{1}{2}OA \cdot CD.$$

Но

$$OA = R,\ AB = R\operatorname{tg}\alpha,$$
$$\overset{\smile}{CA} = R\alpha,\ CD = R\sin\alpha,$$

так что

$$\frac{1}{2}R^2\operatorname{tg}\alpha > \frac{1}{2}R^2\alpha > \frac{1}{2}R^2\sin\alpha.$$

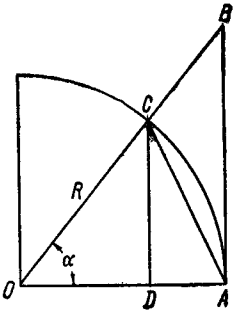

Рис. 23.

Сокращая это двойное неравенство на положительный множитель $\frac{1}{2}R^2$, мы и получаем неравенство (29).

31°. Синус бесконечно малого угла. Допустим, что угол α стремится к нулю, последовательно принимая значения $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \ldots$

В таком случае справедлива формула

$$\boxed{\lim\frac{\sin\alpha_n}{\alpha_n} = 1}, \tag{30}$$

являющаяся одной из важных формул математики.

Полезно запомнить словесное выражение формулы (30): *предел отношения синуса бесконечно малого угла к величине этого угла в радианах равен единице.*

Для доказательства этой формулы мы можем допустить, что все значения α_n положительны, ибо величина отношения $\frac{\sin\alpha_n}{\alpha_n}$ не изменяется от замены α_n на $-\alpha_n$. Кроме того,

можно считать, что $\alpha_n < \frac{\pi}{2}$, ибо это, во всяком случае, так для достаточно больших значений n.

Итак,

$$0 < \alpha_n < \frac{\pi}{2},$$

а тогда, в силу (29),

$$\operatorname{tg} \alpha_n > \alpha_n > \sin \alpha_n,$$

откуда, деля все части неравенства на положительное число $\sin \alpha_n$, получаем:

$$\frac{1}{\cos \alpha_n} > \frac{\alpha_n}{\sin \alpha_n} > 1.$$

Для величин, обратных этим, справедливы неравенства противоположного смысла:

$$\cos \alpha_n < \frac{\sin \alpha_n}{\alpha_n} < 1. \qquad (31)$$

По условию угол α_n стремится к нулю. Но тогда (как нетрудно усмотреть из чертежа) косинус этого угла стремится к единице:

$$\lim [\cos \alpha_n] = 1,$$

а так как [согласно (31)] дробь $\frac{\sin \alpha_n}{\alpha_n}$ лежит между единицей и $\cos \alpha_n$, то и она должна стремиться к единице, чем и доказана формула (30).

32°. Квадратура синусоиды. Рассмотрим кривую, имеющую уравнение

$$y = \sin x. \qquad (32)$$

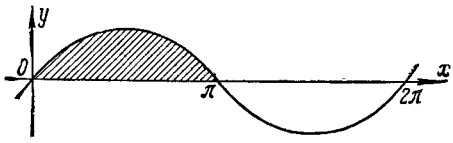

Рис. 24.

Она выглядит так, как это изображено на рис 24, и называется *синусоидой*.

Найдем площадь фигуры, ограниченной участком синусоиды от $x = 0$ до $x = \pi$ и осью абсцисс (эта фигура заштрихована на рис. 24).

Для этой цели, как обычно, разобьем отрезок оси абсцисс от $x = 0$ до $x = \pi$ на n частей точками

$$x_1 = \frac{\pi}{n}, \quad x_2 = \frac{2\pi}{n}, \quad \ldots, \quad x_n = \frac{n\pi}{n}$$

и восставим из этих точек перпендикуляры до пересечения с синусоидой. Длина этих перпендикуляров находится из уравнения (32) и оказывается равной

$$\sin\frac{\pi}{n},\quad \sin\frac{2\pi}{n},\quad \sin\frac{3\pi}{n},\ \ldots,\ \sin\frac{n\pi}{n}$$

(так что последний из них равен нулю). Эти перпендикуляры разрезают всю фигуру на n полосок ширины $\frac{\pi}{n}$ каждая. Принимая каждую из этих полосок за прямоугольник с основанием $\frac{1}{n}\pi$ и высотой (для k-й слева полоски), равной $\sin\frac{k\pi}{n}$, будем иметь приближенное выражение площади k-й элементарной полоски

$$F_k \doteq \frac{\pi}{n}\sin\frac{k\pi}{n}.$$

Отсюда площадь всей интересующей нас фигуры приближенно равна

$$F \doteq \frac{\pi}{n}\sum_{k=1}^{n}\sin\frac{k\pi}{n}.$$

Это выражение на основании формулы (28) n° 29, в которой следует положить $\alpha = \frac{\pi}{n}$, можно представить и так:

$$F \doteq \frac{\pi}{n}\cdot\frac{\sin\frac{\pi}{2}\cdot\sin\frac{(n+1)\pi}{2n}}{\sin\frac{\pi}{2n}},$$

или $\left(\text{поскольку } \sin\frac{\pi}{2}=1\right)$ так:

$$F \doteq \frac{\pi}{n}\cdot\frac{\sin\frac{(n+1)\pi}{2n}}{\sin\frac{\pi}{2n}}. \qquad (33)$$

Точное выражение площади есть предел правой части равенства (33) при неограниченно растущем n. Этот предел находим из следующих соображений.

Очевидно,

$$\frac{(n+1)\pi}{2n} = \frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2n},$$

так что этот угол стремится к $\frac{\pi}{2}$, а потому, как легко видеть из чертежа, синус этого угла должен стремиться к единице:

$$\lim \sin \frac{(n+1)\pi}{2n} = 1. \tag{34}$$

С другой стороны, угол $\alpha_n = \frac{\pi}{2n}$ стремится к нулю, а потому, в силу формулы (30) n° 31,

$$\lim \left[\frac{\pi}{n} \cdot \frac{1}{\sin \frac{\pi}{2n}} \right] = \lim \left[2 \frac{\alpha_n}{\sin \alpha_n} \right] = 2. \tag{35}$$

Из (34) и (35) (на основании теоремы о пределе произведения) находим окончательно, что

$$F = 2.$$

Итак, площадь, ограниченная *полуволной синусоиды и стягивающей полуволну хордой, равна двум.*

33°. Объем тела вращения синусоиды. Допустим, что синусоида, изображенная на рис. 24, вращается вокруг оси Ox. Найдем объем V тела, ограниченного поверхностью, образованной вращением одной полуволны синусоиды.

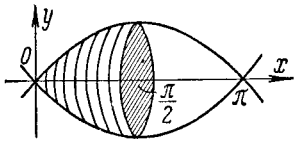

Рис. 25.

С этой целью проведем через точку $x = \frac{\pi}{2}$ плоскость, перпендикулярную оси Ox. Очевидно, эта плоскость (рис. 25) разрежет наше тело на две равные части. Мы найдем объем V^* левой половины интересующего нас тела. Разбивая отрезок оси Ox от $x = 0$ до $x = \frac{\pi}{2}$ на n частей точками вида

$$x_k = k \frac{\pi}{2n} \qquad (k = 1, 2, \ldots, n),$$

проведем через эти точки плоскости, перпендикулярные оси Ox. Эти плоскости пересекутся с нашей поверхностью по кругам радиуса (для k-й плоскости)

$$r_k = \sin \frac{k\pi}{2n}.$$

Рассматривая элементарный слой, лежащий между $(k-1)$-й и k-й плоскостями, как цилиндр радиуса r_k и высоты $h = \frac{\pi}{2n}$, находим элементарный объем

$$V_k \doteq \pi r_k^2 h = \frac{\pi^2}{2n} \sin^2 \frac{k\pi}{2n},$$

откуда весь объем левой половины тела приближенно равен

$$V^* \doteq \frac{\pi^2}{2n} \sum_{k=1}^{n} \sin^2 \frac{k\pi}{2n}.$$

Точное же значение объема есть предел этого выражения при неограниченно растущем n:

$$V^* = \lim \left[\frac{\pi^2}{2n} \sum_{k=1}^{n} \sin^2 \frac{k\pi}{2n} \right]. \tag{36}$$

Для нахождения этого предела мы применим искусственный прием, позволяющий значительно сократить вычисления (именно имея в виду этот прием, мы и стали рассматривать не все тело, а его левую половину).

Прием состоит в следующем: рассмотрим, наряду с синусоидой (32), кривую, являющуюся графиком функции

$$y = \cos x. \tag{37}$$

Если мы примем во внимание, что

$$\cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right),$$

то легко сообразим, что кривая (37) есть та же синусоида (32), но сдвинутая вдоль оси Ox на $\frac{\pi}{2}$ *влево* (рис. 26).

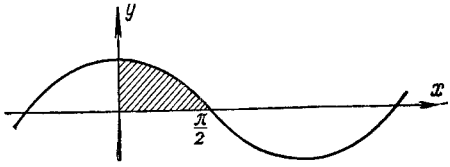

Рис. 26.

Предположим теперь, что мы вращаем *эту* синусоиду вокруг оси Ox. Ясно, что объем тела, образованного вращением фигуры, заштрихованной на рис. 26, равен объему V^*

левой половины нашего первоначального тела (ибо он в точности совпадает с объемом *правой* половины начального тела).

С другой стороны, если бы мы стали вычислять этот объем по методу суммирования, то очевидно, пришли бы к пределу, сходному с (36), с заменой, однако, всех синусов на косинусы, т. е. получили бы, что

$$V^* = \lim \left[\frac{\pi^2}{2n} \sum_{k=1}^{n} \cos^2 \frac{k\pi}{2n} \right]. \tag{38}$$

Итак, одна и та же величина V^* может быть представлена в двух видах:

$$V^* = \lim \left[\frac{\pi^2}{2n} \sum_{k=1}^{n} \sin^2 \frac{k\pi}{2n} \right] = \lim \left[\frac{\pi^3}{2n} \sum_{k=1}^{n} \cos^2 \frac{k\pi}{2n} \right].$$

Складывая эти два выражения (что, очевидно, можно сделать под знаком предела), получим:

$$2V^* = \lim \left[\frac{\pi^2}{2n} \sum_{k=1}^{n} \left(\sin^2 \frac{k\pi}{2n} + \cos^2 \frac{k\pi}{2n} \right) \right]. \tag{39}$$

Но

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1,$$

так что каждое слагаемое суммы (39) равно единице, а так как число слагаемых n, то

$$2V^* = \lim \left[\frac{\pi^2}{2n} \cdot n \right] = \lim \left(\frac{\pi^2}{2} \right) = \frac{\pi^2}{2},$$

ибо постоянная величина сама себе служит пределом.

Объем V^* левой половины тела получается отсюда делением на два, но так как нас с самого начала интересовал объем всего тела, то делить не нужно, и окончательный результат есть

$$V = 2V^* = \frac{\pi^2}{2}. \tag{40}$$

Итак, *объем тела, ограниченного поверхностью, образованной вращением полуволны синусоиды вокруг ее хорды, равен* $\frac{\pi^2}{2}$.

34°. Средние значения. Пусть некоторая величина y принимает конечное число значений:

$$y_1,\ y_2,\ y_3,\ \ldots,\ y_n.$$

В таком случае среднее арифметическое

$$y_* = \frac{y_1 + y_2 + \ldots + y_n}{n}$$

этих чисел y_k носит название *среднего значения* величины y. Полезность рассмотрения этой величины коренится в двух ее свойствах.

A. *Если все значения величины y лежат между числами m и M, то среднее значение лежит между этими же числами, т. е. если*

$$m \leqslant y_k \leqslant M \quad (k = 1,\ 2,\ \ldots,\ n), \tag{41}$$

то и

$$m \leqslant y_* \leqslant M.$$

B. *Если все значения величины y равны одному и тому же числу h, то и среднее значение равно этому числу.*

Свойство **B** очевидно, а для доказательства свойства **A** нужно сложить все неравенства (41), что дает

$$nm \leqslant \sum_{k=1}^{n} y_k \leqslant nM,$$

и разделить полученное неравенство на n.

Наряду со средним значением y_* величины y часто рассматривают *среднее квадратичное* y^* этой же величины. Это среднее определяется равенством

$$y^* = \sqrt{\frac{y_1^2 + y_2^2 + \ldots + y_n^2}{n}}. \tag{42}$$

Иначе говоря, *среднее квадратичное величины y есть квадратный корень из среднего значения величины y^2.*

Легко показать, что если все значения величины y неотрицательны, то ее среднее квадратичное обладает теми же свойствами **A** и **B**, что и среднее арифметическое.

В самом деле, если

$$0 \leqslant m \leqslant y_k \leqslant M \quad (k = 1,\ 2,\ \ldots,\ n),$$

то

$$m^2 \leqslant y_k^2 \leqslant M^2 \quad (k = 1,\ 2,\ \ldots,\ n).$$

Складывая все эти неравенства, деля результат на n и извлекая квадратный корень, получаем

$$m \leqslant y^* \leqslant M,$$

т. е. мы доказали, что y^* обладает свойством **А**. Свойство **В** очевидно.

В рассмотренных случаях величина y принимала конечное число значений. В прикладных вопросах приходится по большей части рассматривать величины, меняющиеся непрерывным образом. Для вычисления средних таких величин нужно привлечь метод суммирования бесконечно малых. Иллюстрируем это одним примером из области физики.

35°. Эффективная сила тока. Рассмотрим переменный синусоидальный ток

$$I = A \sin t, \tag{43}$$

где t — время, I — сила тока. В разные моменты времени величина I имеет различные значения, причем наибольшее из них равно A

$$I_{\max} = A. \tag{44}$$

В электротехнике важную роль играет среднее квадратичное I_e силы тока за время, равное периоду колебания, т. е. за время от $t = 0$ до $t = 2\pi$.

Оказывается, что при измерении силы тока амперметром последний покажет именно величину I_e. Эта величина называется *эффективной силой тока*.

Вычислим I_e для тока (43).

С этой целью разложим промежуток времени от момента $t = 0$ до момента $t = 2\pi$ на n малых промежутков моментами

$$t_k = \frac{2\pi}{n} k \quad (k = 1, 2, \ldots, n).$$

Если число n очень велико, то можно приближенно считать, что за промежуток времени от момента t_{k-1} до момента t_k сила тока не успевает измениться, а равна своему значению в момент t_k

$$I_k \doteq A \sin \frac{2\pi}{n} k.$$

Иначе говоря, мы допускаем, что ток за элементарный промежуток времени постоянен. При этом упрощающем до-

пущении эффективная сила тока будет равна

$$I_e = \sqrt{\frac{\sum_{k=1}^{n} I_k^2}{n}} = \sqrt{\frac{A^2 \sum_{k=1}^{n} \sin^2 \frac{2\pi}{n} k}{n}}. \qquad (45)$$

Истинное значение I_e есть *предел* правой части равенства (45) при неограниченном возрастании n:

$$I_e = \lim \left[A \cdot \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \sin^2 \frac{2\pi}{n} k} \right].$$

Найдем предел подкоренного выражения

$$\lim \left[\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \sin^2 \frac{2\pi}{n} k \right]. \qquad (46)$$

Это можно сделать без всяких вычислений следующим способом.

Допустим, что мы стали бы искать объем тела, образуемого вращением одной *волны* синусоиды (32) вокруг оси Ox.

Если применить метод суммирования бесконечно малых, то, повторяя рассуждения п° 33, мы представим этот объем в форме

$$\lim \left[\frac{2\pi^2}{n} \sum_{k=1}^{n} \sin^2 \frac{2k\pi}{n} \right].$$

С другой стороны, этот объем, очевидно, вдвое больше объема (40) тела, получаемого вращением *полуволны* синусоиды, т. е. искомый объем равен π^2.

Итак,

$$\lim \left[\frac{2\pi^2}{n} \sum_{k=1}^{n} \sin^2 \frac{2k\pi}{n} \right] = \pi^2. \qquad (47)$$

Легко понять, что предел (46) получается из предела (47) делением на $2\pi^2$, откуда следует, что

$$\lim \left[\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \sin^2 \frac{2k\pi}{n} \right] = \frac{1}{2}.$$

В таком случае *)

$$I_e = A\sqrt{\frac{1}{2}}. \tag{48}$$

Эта формула и решает задачу.

Если сопоставить формулы (48) и (44), то мы увидим, что

$$I_{\max} = I_e\sqrt{2},$$

т. е. максимальная сила тока примерно в полтора раза больше той, которая отмечается амперметром.

---

*) Мы пользуемся здесь такой теоремой: если переменная величина $x_n \geqslant 0$ стремится к пределу a, то $\sqrt{x_n}$ стремится к $\sqrt{a}$.

ПРИМЕРЫ ДЛЯ УПРАЖНЕНИЙ

Приведем некоторое число примеров для самостоятельного упражнения в изложенных методах. Мы настоятельно советуем читателю проделать эти упражнения. Как выразился Ньютон, „в математике примеры полезнее правил".

1) Определить сумму

$$S_4 = \sum_{k=1}^{n} k^4.$$

Ответ. $S_4 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30}$.

2) Определить площадь прямоугольного треугольника методом суммирования.

3) Найти площадь, ограниченную осью Ox, кривой $y = x^3$ и прямой $x = 1$.

Ответ. $\dfrac{1}{4}$.

4) Найти предел $\lim \left[\dfrac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{n} \sqrt{n^2 - k^2} \right]$ при неограниченном возрастании n.

Указание. Определить площадь четверти круга суммированием прямоугольных полосок.

Ответ. $\dfrac{\pi}{4}$.

5) Исходя из результата предыдущей задачи, найти объем цилиндра, разлагая его на прямоугольные плитки, как это указано на рис. 9.

6) Определить давление воды, находящейся в цилиндрическом стакане, на его стенки.

Ответ. $P = \pi R H^2$.

7) Найти работу, затрачиваемую при выкачивании воды из конического сосуда, основание которого горизонтально и расположено *ниже* вершины.

Ответ. $T = \dfrac{1}{4} \pi R^2 H^2$.

8) Определить объем эллипсоида вращения прямым вычислением без ссылки на принцип Кавальери.

9) Найти объем эллипсоида, образованного вращением эллипса $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ вокруг оси ординат.

Ответ. $V=\frac{4}{3}\pi a^2 b$.

10) Какую работу необходимо затратить на выкачивание воды из полушара, обращенного диаметральной плоскостью книзу?

Ответ. $T=\frac{5}{12}\pi R^4$.

11) Определить давление воды на стенки призматического сосуда высоты H с периметром основания p.

Ответ. $P=\frac{1}{2}pH^2$.

12) Опираясь на результат упражнения 1, найти объем тела, ограниченного поверхностью, получаемой при вращении параболы $y=ax^2$ вокруг оси Ox, и плоскостью, перпендикулярной оси Ox и отстоящей на расстояние h от начала.

Ответ. $V=\frac{1}{5}\pi a^2 h^5$.

13) Найти предел

$$\lim\left[\frac{1}{n^{p+1}}\sum_{k=1}^{n}k^p\right]$$

при неограниченном возрастании n (число p — натуральное).

Ответ. $\frac{1}{p+1}$.

14) Найти предел

$$\lim\left[\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{\frac{k}{n}}\right]$$

при неограниченном возрастании n.

Указание. Найти площадь криволинейного треугольника OQM (рис. 19), разлагая его на полоски, параллельные оси Ox.

Ответ. $\frac{2}{3}$.

15) Найти сумму

$$S = \sum_{k=1}^{n} \cos ka.$$

Ответ. $S = \dfrac{\sin \dfrac{2n+1}{2} a}{2 \sin \dfrac{a}{2}} - \dfrac{1}{2}$.

16) Пользуясь предыдущим результатом, найти площадь F фигуры, ограниченной кривой $y = \cos x$ и осями координат.

Ответ. $F = 1$.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие 2
§ 1. Некоторые формулы алгебры 3
§ 2. Определение давления жидкости на вертикальную стенку 8
§ 3. Определение работы по выкачиванию жидкости из сосудов 17
§ 4. Нахождение объемов 24
§ 5. Парабола и эллипс 36
§ 6. Синусоида 41
Примеры для упражнений 53

Натансон Исидор Павлович
Суммирование бесконечно малых величин

Редактор *Г. П. Акилов*

Техн. редактор *Р. Г. Польская* Корректор *Е. А. Максимова*

Сдано в набор 17/I 1960 г. Подписано к печати 15/IV 1960 г. Бумага 84×108/32. Физ. печ. л. 1,75. Усл. печ. л. 2,87. Уч.-изд. л. 2,34. Тираж 35 000 экз. Т-01082. Цена 70 коп. Заказ № 1079.

Государственное издательство физико-математической литературы
Москва, В-71, Ленинский проспект, 15

Типография № 2 им. Евг. Соколовой УПП Ленсовнархоза.
Ленинград, Измайловский пр., 29.

2269
30 —
70 к.
С 1. 1. 1931 7 коп.
рус